行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

在失敗-設限抽樣方案下對具有浴缸型或單峰型故障率函數的兩壽命分配之參數做統計推論

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC92-2118-M-032-010-
執行期間：92年08月01日至93年07月31日
執行單位：淡江大學統計學系(所)

計畫主持人：吳忠武

計畫參與人員：尤慧怡

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 93年9月27日

行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

在失敗-設限抽樣方案下對具有浴缸型或單峰型故障率函數的兩壽命分配之參數做統計推論

計劃編號：NSC92-2118-M-032-010
執行期限：92 年 8 月 1 日至 93 年 7 月 31 日
主持人：吳忠武　研究生：尤慧怡　執行機構及單位名稱：淡江大學統計學系

一、中文摘要

本文最主要的目的有兩個，其一，我們將利用具有浴缸型故障率函數之雙參數分配及具有單峰型故障率函數之雙參數的 Burr type XII 分配的第一失敗設限樣本形成 15 個樞紐量，並且推廣 Chen(2000)的理念而導出 m-1 個樞紐量。再分別利用這 m+14 個樞紐量對形狀參數做假設檢定及建立形狀參數的信賴區間。最後，歸納出最適用的參數檢定及區間估計之方法。

其二，找出最適用的樞紐量在大樣本下之近似分配。再利用此近似分配對形狀參數做假設檢定，將其與大樣本下的概似比檢定做比較，看看此方法在大樣下是否仍然適用。

最後，我們給兩個例子和做一些蒙地卡羅模擬來評估這 m+14 個樞紐量在給定的顯著水準下，對形狀參數做假設檢定，那一個樞紐量提供的檢定統計量較為有效力；並且利用這些樞紐量在給定的信賴水準下，對形狀參數所建立的信賴區間，那一個信賴區間的平均區間長度較短

Abstract

This paper has two part: The first parts, we provide m+14 pivotal quantities to test the shape parameter of the two lifetime distributions and establish confidence interval of the shape parameter under the first failure-censored samples. Moreover, we also find the best test statistic based on their most power of test among all test statistics. In addition, we obtain the best pivotal quantities with the shortest tolerance length.

The second part, we also discuss that the asymptotic behavior of the best test statistic is comparison with likelihood ratio test for large sample.

Finally, we give two examples and the Monte Carlo simulation to assess the behavior (including higher power and more shorter length of confidence interval) of these pivotal quantities for testing null hypotheses under given significance level and establishing confidence interval of the shape parameter under the given confidence coefficient.

Keywords: First failure-censored sample; Shape parameter; bathtub-shape; Unimodal shape; Testing hypotheses; Burr type XII distribution; Confidence interval; Monte Carlo simulation.

二、緣由與目的

在檢測產品(生物)的壽命時，我們常會因為時間、人力和金錢的限制或人為疏忽而無法取得完整樣本。因此本文將採用的第一失敗設限抽樣方案來縮短檢測產品壽命的時間。

許多產品的故障率函數會呈現浴缸型（bathtub shape）的曲線模式，例如電子、電鍍及機械等的產品。因此，我們在描述這種情況時，如果利用具有浴缸型故障率函數之雙參數分配會比 Weibull 分配，Extreme value 分配及 Normal 分配等等來得適合。然而，Jiang et al. (2003)曾經提到並非所有產品的故障率函數都呈現浴缸型的曲線模式，例如當產品因疲勞或劣化而故障時，其壽命模式會呈現單峰型(unimodal)的故障率曲線模式。因此，如果利用具有單峰型故障率函數之雙參數的 Burr type XII 分配會比用其他的壽命分配來得適合。所以，在本文中我們要探討在第一失敗設限抽樣方案下，對具有浴缸型或單峰型故障率函數的壽命分配之形狀參數進行研究。

(一) 具有浴缸型故障率函數的壽命分配

若一隨機變數 X 為來自於具有尺度參數 λ 與形狀參數 β 的雙參數分配，則其累積分配函數、機率密度函數及其所對應的故障率函數分別被給定如下：

$$F(x) = 1 - \exp[\lambda(1 - e^{x^{\beta}})] \quad (x > 0, \beta > 0) \tag{1-1}$$

$$f(x) = \lambda\beta x^{\beta-1} e^{x^{\beta}} e^{\lambda(1-e^{x^{\beta}})} \quad (x > 0, \beta > 0) \tag{1-2}$$

與 $h(x)=\lambda\beta\, x^{\beta-1}e^{x^{\beta}}\ (x>0,\beta>0)$ (1-3)

雖然，此分配具有尺度參數 λ 與形狀參數 β，但我們只針對形狀參數 β 做統計推論，其原因如下：

(1) 雙參數分配的形狀會受形狀參數 β 的影響。但不會受尺度參數 λ 影響。

(2) 雙參數分配所對應的故障率函數的形狀會受形狀參數 β 影響。當 β<1 時，故障率函數呈現浴缸形。而當 β ≥ 1 時，此分配為遞增的故障率函數。

故本文只針對會影響故障率函數形狀之形狀參數 β 做統計推論。

假設從具有尺度參數 λ 與形狀參數 β 的雙參數分配如(1-1)式中抽取出 m 組而每組具有樣本數為 n 的隨機樣本，記為

$$\begin{array}{lcccc} \text{第1組} & X_{11} & X_{12} & \Lambda & X_{1n} \\ \text{第2組} & X_{21} & X_{22} & \Lambda & X_{2n} \\ M & M & M & O & M \\ \text{第m組} & X_{m1} & X_{m2} & \Lambda & X_{mn} \end{array}$$

，之後找出每一組的最小順序統計量，分別記為 $X_{(1)1},X_{(1)2},K,X_{(1)m}$。再將 $X_{(1)1},X_{(1)2},K,X_{(1)m}$ 排序後，得其對應的順序統計量記為 $X'_{(1)1}<X'_{(1)2}<K<X'_{(1)m}$。另外，此 m 個最小順序統計量 $X_{(1)1},X_{(1)2},K,X_{(1)m}$ 為互相獨立且具有相同的累積分配函數，其形式被給定如下：

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)i}}(x) &= \Pr[X_{(1)i}\le x]=1-\Pr[X_{(1)i}<x] \\ &= 1-\Pr\{\min[X_{i1},X_{i2},K,X_{in}]>x\} \\ &= 1-\Pr[X_{i1}>x]\cdot\Pr[X_{i2}>x]\Lambda\ \Pr[X_{in}>x] \\ &= 1-\{\Pr[X_{i1}>x]\}^{n}=1-\{1-\Pr[X_{i1}\le x]\}^{n} \\ &= 1-\{1-[1-e^{\lambda(1-e^{x^{\beta}})}]\}^{n} \\ &= 1-e^{n\lambda(1-e^{x^{\beta}})}\quad (x>0,\beta>0) \qquad (1\text{-}4) \end{aligned}$$

因此，由上述結果，我們可將 $X_{(1)1},X_{(1)2},K,X_{(1)m}$ 看成來自於具有尺度參數 $\lambda^{*}=n\lambda$ 與形狀參數 β 的雙參數分配之一組樣本數為 m 的隨機樣本。

若令隨機變數 $Y_i=n\lambda(e^{X^{\beta}_{(1)i}}-1),i=1,K,m$，則 Y_i 的累積分配函數為

$$\begin{aligned} G_{Y_i}(y) &= \Pr[Y_i\le y]=\Pr[n\lambda(e^{X^{\beta}_{(1)i}}-1)\le y] \\ &= \Pr\{X_{(1)i}\le[\log(\frac{y}{n\lambda}+1)]^{1/\beta}\} \\ &= 1-e^{n\lambda[1-e^{\log(\frac{y}{n\lambda}+1)}]}=1-e^{-y}\quad (y>0) \qquad (1\text{-}5) \end{aligned}$$

因此，我們可知 $Y_1,\ldots,Y_m$ 為互相獨立且皆服從於標準指數分配。並且，將 Y_1,K,Y_m 排序後，得其對應之順序統計量，記為 $Y_{(1)}<Y_{(2)}<K<Y_{(m)}$。若將 $Y_i=n\lambda(e^{X^{\beta}_{(1)i}}-1)$ 對 $X_{(1)i}$ 微分可推得其結果必會大於零，則可推得 Y_i 為 $X_{(1)i}$ 的嚴格遞增函數，因此我們可以得知若 $X'_{(1)1}<K<X'_{(1)m}$，則 $Y_{(1)}<Y_{(2)}<K<Y_{(m)}$，其中 $Y_{(i)}=n\lambda[e^{x'^{\beta}_{(1)i}}-1]$，i=1,…,m。

利用此組隨機樣本的順序統計量 $Y_{(1)}<Y_{(2)}<K<Y_{(m)}$ 形成下列不同的十五個樞紐量，如下：

$$W^{(1)}(\beta)=\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1\right)}{\left[\prod_{i=1}^{m}\left(e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1\right)\right]^{1/m}} \qquad (1\text{-}6)$$

$$W^{(2)}(\beta)=\frac{1}{m-1}\sum_{i=2}^{m}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)1}}-1} \qquad (1\text{-}7)$$

$$W^{(3)}(\beta)=\frac{1}{m-1}\sum_{i=2}^{m}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)1}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1} \qquad (1\text{-}8)$$

$$W^{(4)}(\beta)=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)m}}-1} \qquad (1\text{-}9)$$

$$W^{(5)}(\beta)=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)m}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1} \qquad (1\text{-}10)$$

$$W^{(6)}(\beta)=\frac{1}{m-1}\sum_{i=2}^{m}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)i-1}}-1} \qquad (1\text{-}11)$$

$$W^{(7)}(\beta)=\frac{1}{m-1}\sum_{i=2}^{m}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)i-1}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1} \qquad (1\text{-}12)$$

$$W^{(8)}(\beta)=\begin{cases}\dfrac{\left[\sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}}\dfrac{e^{X'^{\beta}_{(1)2i+1}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)2i-1}}-1}+\sum_{j=2}^{\frac{m-1}{2}}\dfrac{e^{X'^{\beta}_{(1)2j}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)2j-2}}-1}\right]}{(m-2)}, & \text{若m為奇數} \\ \dfrac{\left[\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\dfrac{e^{X'^{\beta}_{(1)2i+1}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)2i-1}}-1}+\sum_{j=2}^{\frac{m}{2}}\dfrac{e^{X'^{\beta}_{(1)2j}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)2j-2}}-1}\right]}{(m-2)}, & \text{若m為偶數}\end{cases} \qquad (1\text{-}13)$$

$$W^{(9)}(\beta)=\left[\prod_{i=2}^{m}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)1}}-1}\right]^{1/m-1} \qquad (1\text{-}14)$$

$$W^{(10)}(\beta)=\left[\prod_{i=2}^{m}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)1}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1}\right]^{1/m-1} \qquad (1\text{-}15)$$

$$W^{(11)}(\beta)=\left[\prod_{i=2}^{m}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)m}}-1}\right]^{1/m-1} \quad (1\text{-}16)$$

$$W^{(12)}(\beta)=\left[\prod_{i=1}^{m-1}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)m}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1}\right]^{1/m-1} \quad (1\text{-}17)$$

$$W^{(13)}(\beta)=\left[\prod_{i=2}^{m}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)i-1}}-1}\right]^{1/m-1} \quad (1\text{-}18)$$

$$W^{(14)}(\beta)=\left[\prod_{i=2}^{m}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)i-1}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1}\right]^{1/m-1} \quad (1\text{-}19)$$

$$W^{(15)}(\beta)$$
$$=\begin{cases}\left[\prod_{i=1}^{\frac{m-1}{2}}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)2i+1}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)2i-1}}-1}\times\prod_{j=2}^{\frac{m-1}{2}}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)2j}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)2j-2}}-1}\right]^{1/m-2} & \text{,若m為奇數} \quad (1-20)\\ \left[\prod_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)2i+1}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)2i-1}}-1}\times\prod_{j=2}^{\frac{m}{2}}\frac{e^{X'^{\beta}_{(1)2j}}-1}{e^{X'^{\beta}_{(1)2j-2}}-1}\right]^{1/m-2} & \text{,若m為偶數}\end{cases}$$

我們可以很容易地證明此十五個樞紐量的分配皆與尺度參數λ和形狀參數β無關；因此，它們對β皆能提供一個檢定統計量。在此，我們以 $W^{(i)}_{\alpha}(m,n)$ 表示 $W^{(i)}(\beta)$ 的分配之上α臨界值(upper α critical value)，$\forall i=1,K,15$，則 $\Pr[W^{(i)}_{1-\alpha/2}(m,n)<W^{(i)}(\beta)<W^{(i)}_{\alpha/2}(m,n)]=1-\alpha \quad \forall i,\ 0<\alpha<1$。

因為這些樞紐量的分配計算較複雜且不易求得, 所以 $W^{(i)}(\beta)$ 的上百分位數和下百分位數將藉由蒙地卡羅模擬求得，並且採用 AbSoft Fortran (Inclusive of IMSL) 4.6, (1999) Copyright (c), Absoft Crop.的模擬工具，在不同的組數 m=5,6,…,40 及樣本數 n=10,20,30 之組合下，即可獲得這十五個樞紐量的分配之臨界值（**詳細內容參見尤慧怡之碩士論文**）。

之後，我們也推廣 Chen(2000)的理念而提出的樞紐量，其形式如下：

$$\delta^{(j)}(\beta)=\frac{j\left\{\sum_{i=j+1}^{m}\left(e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1\right)-(m-j)\left(e^{X'^{\beta}_{(1)j}}-1\right)\right\}}{(m-j)\left\{\sum_{i=1}^{j}\left(e^{X'^{\beta}_{(1)i}}-1\right)+(m-j)\left(e^{X'^{\beta}_{(1)j}}-1\right)\right\}}$$
$$,\ j=1,K,m-1 \quad (1-21)$$

而此樞紐量服從自由度為 $2(m-j)$ 和 $2j$ 的 F 分配。

假設 $X'_{(1)1}<X'_{(1)2}<K<X'_{(1)m}$ 為來自於具有浴缸型或遞增故障率函數的雙參數分配之第一失敗設限樣本所對應之順序統計量則對假設檢定 $H_0:\beta=\beta_0$ vs. $H_1:\beta\neq\beta_0$ 的決策原則如下：

(1) 若 $W^{(i)}(\beta_0)>W^{(i)}_{\alpha/2}(m,n)$ 或 $W^{(i)}(\beta_0)<W^{(i)}_{1-\alpha/2}(m,n)$，則棄卻 $H_0:\beta=\beta_0$，$i=1,K,15$。

(2) 若 $\delta^{(j)}(\beta_0)>F_{\alpha/2}(2(m-j),2j)$ 或 $\delta^{(j)}(\beta_0)<F_{1-\alpha/2}(2(m-j),2j)$，則棄卻 $H_0:\beta=\beta_0$，$j=1,K,m-1$

進一步，我們也證明對方程式 $W^{(i)}(\beta)=t$，$i=1,K,15$ 與 $\delta^{(j)}(\beta)=t$，$j=1,K,m-1$ 而言，它們皆存在一個 $\beta>0$ 的唯一解。因此，可利用之前所定義的第一失敗設限樣本及所有的樞紐量來建立形狀參數β的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間，其建立的方式如下：

(1) 若 $\beta^{(i)}_L$ 及 $\beta^{(i)}_U$ 各為 $W^{(i)}(\beta)=W^{(i)}_{1-\alpha/2}(m,n)$ 與 $W^{(i)}(\beta)=W^{(i)}_{\alpha/2}(m,n)$ 兩方程式的解, 則 $(\beta^{(i)}_L,\beta^{(i)}_U)$ 為形狀參數 β 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間，其中 i=1,2,5,6,8,9,12,13,15。

(2) 若 $\beta^{(i)}_L$ 及 $\beta^{(i)}_U$ 各為 $W^{(i)}(\beta)=W^{(i)}_{\alpha/2}(m,n)$ 與 $W^{(i)}(\beta)=W^{(i)}_{1-\alpha/2}(m,n)$ 兩方程式的解，則 $(\beta^{(i)}_L,\beta^{(i)}_U)$ 為形狀參數 β 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間，其中 i=3,4,7,10,11,14。

(3) 若 $\beta^{*(j)}_L$ 及 $\beta^{*(j)}_U$ 各為 $\delta^{(j)}(\beta)=F_{1-\alpha/2}(2(m-j),2j)$ 與 $\delta^{(j)}(\beta)=F_{\alpha/2}(2(m-j),2j)$ 兩方程式的解，則 $(\beta^{*(j)}_L,\beta^{*(j)}_U)$ 為形狀參數 β 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間，其中 $j=1,K,m-1$。

我們將模擬分成兩個部分，第一部分為利用(1-6)至(1-21) 式所提到的樞紐量來檢定 $H_0:\beta=\beta_0$ vs. $H_1:\beta\neq\beta_0$，並且利用蒙地卡羅模擬的方式來比較各樞紐量的檢定力。假定 $\beta_0=1$ (遞增故障率函數)及 $\beta_0=0.6$ (浴缸型故障率函數)，而在給定顯著水準 $\alpha=0.1$、形狀參數β=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 4.0, 6.0 及尺度參數λ=1 之下，在不同的組數 m=5,10, …,40 及樣本數 n=10,20,30 之組合下，即可獲得各個樞紐量的檢定力（**詳細內容參見尤慧怡之碩士論文**）。我們可以發現不論是我們所提的樞紐量或推廣 Chen(2000)的理念而提出的樞紐量，在任何的組數、樣本數及 β_0，樞紐量 $W^{(1)}(\beta)$ 的檢定力高於其他樞紐量的檢定力。

接著，我們也同樣用模擬的方法且假定β的真值分別為 1.0(遞增故障率函數)及 0.6 (浴缸型故障率函數) 且給定尺度參數λ=1，在不同的組數

m=5,10,…,40 及樣本數 n=10,20,30 之組合下，來求得各個樞紐量在信賴係數 1-α=0.9 之下所建立出形狀參數β的 90%信賴區間及平均區間長度(**詳細內容參見尤慧怡之碩士論文**)。我們可以發現不論是我們所提的樞紐量或推廣 Chen(2000)的理念而提出的樞紐量，在任何的組數、樣本數及β_0，樞紐量 $W^{(1)}(\beta)$ 所建立的信賴區間的平均區間長度最短。

由以上模擬可知在組數小於等於 40 時，$W^{(1)}(\beta)$的檢定力都是最高的。而當組數大於 40 時就不知道其是否仍為較佳的統計方法，又因$W^{(1)}(\beta)$的分配計算複雜且不易求得，所以我們將樞紐量$W^{(1)}(\beta)$改寫，如下：

$$T_1(\beta)=\left\{\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(e^{X_{(1)i}^{\beta}}-1\right)}{\left[\prod_{i=1}^{m}\left(e^{X_{(1)i}^{\beta}}-1\right)\right]^{1/m}}-\frac{1}{d}\right\}$$

$$=\left\{\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(e^{X_{(1)i}^{\beta}}-1\right)}{\left[\prod_{i=1}^{m}\left(e^{X_{(1)i}^{\beta}}-1\right)\right]^{1/m}}-\frac{1}{d}\right\}=\left[\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i}{\left(\prod_{i=1}^{m}Y_i\right)^{1/m}}-\frac{1}{d}\right] \qquad (2\text{-}22)$$

其中 $Y_i=n\lambda(e^{x_{(1)i}^{\beta}}-1)$，$i=1,K,m$ 及 $d=e^{-\gamma}$ (γ為尤拉常數，其近似值為 0.57722)，使其在大樣本下分配收斂至常態分配。

而對於假設檢定 $H_0:\beta=\beta_0$ vs. $H_1:\beta\neq\beta_0$，其中參數空間 $\Omega=\{(\lambda,\beta)\mid\lambda,\beta>0\}$ 且令 $\varpi=\{(\lambda,\beta)\mid\lambda>0,\beta=\beta_0>0\}$，則其概似比檢定的檢定統計量為 $T_2=-2\log[\frac{L(\hat{\lambda}_{\varpi},\beta_0)}{L(\hat{\lambda}_{\Omega},\hat{\beta}_{\Omega})}]$ (1-23)

$$=2\log(L(\hat{\lambda}_{\Omega},\hat{\beta}_{\Omega}))-2\log(L(\hat{\lambda}_{\varpi},\beta_0))$$

其中 $\hat{\lambda}_{\varpi}$ 為 $\frac{d\log L(\lambda,\beta_0)}{d\lambda}=0$ 的解，即 $\hat{\lambda}_{\varpi}=\frac{m}{n\sum_{i=1}^{m}(e^{x_{(1)i}^{\beta_0}}-1)}$，而 $(\hat{\lambda}_{\Omega},\hat{\beta}_{\Omega})$ 為以下聯立方程式的解:

$$\begin{cases}\frac{\partial\log L(\lambda,\beta)}{\partial\lambda}=\frac{m}{\lambda}+n\sum_{i=1}^{m}(1-e^{x_{(1)i}^{\beta}})=0\\ \frac{\partial\log L(\lambda,\beta)}{\partial\beta}=\frac{m}{\beta}+\sum_{i=1}^{m}\log x_{(1)i}+\sum_{i=1}^{m}x_{(1)i}^{\beta}\log x_{(1)i}-n\lambda\sum_{i=1}^{m}\exp(x_{(1)i}^{\beta})x_{(1)i}^{\beta}\log x_{(1)i}=0\end{cases}$$

在大樣本下，檢定統計量 T_2將分配收斂至自由度為 1 的卡方分配。因此在顯著水準為α時，檢定 $H_0:\beta=\beta_0$ vs. $H_1:\beta\neq\beta_0$的檢定原則為:

(1) 若$T_1(\beta|\beta=\beta_0)>\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}-1}}{d}$或$T_1(\beta|\beta=\beta_0)<\frac{z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}-1}}{d}$，則棄卻$H_0:\beta=\beta_0$。

(2) 若$T_2>\chi^2_{\alpha/2}(1)$或$T_2<\chi^2_{1-\alpha/2}(1)$，則棄卻$H_0:\beta=\beta_0$

利用(1-22)及(1-23)式所提到的樞紐量來檢定 $H_0:\beta=\beta_0$ vs. $H_1:\beta\neq\beta_0$，並且利用蒙地卡羅模擬的方式來比較各樞紐量的檢定力。

在給定顯著水準α=0.1、形狀參數β=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 4.0, 6.0 及尺度參數λ=1 之下，當β_0=0.6 時，組數 m=50,60,…,150 及樣本數 n=10,20,30 之組合，而當β_0=1.0 時，組數 m=50,60,…,200 及樣本數 n=10,20,30 之組合下，即可獲得樞紐量$T_1(\beta)$及T_2的近似檢定力比較表(**詳細內容參見尤慧怡之碩士論文**)。結果我們發現，雖然有些情況$T_1(\beta)$的檢定力略低於T_2或與T_2相差不多，但以整体而言$T_1(\beta)$的檢定力的表現優於T_2。因此，在第一失敗設限抽樣方案下，針對具有浴缸型或遞增故障率函數的雙參數分配之形狀參數β做假設檢定時，若組數大於 40，則我們建議用樞紐量$T_1(\beta)$來進行形狀參數β的假設檢定。

最後，我們將舉出兩個數值實例來說明形狀參數β之假設檢定及區間估計如何應用。

<u>例子 1：</u>

由電腦模擬出 10 組每組樣本數為 10 的具有尺度參數λ=1、形狀參數β=1 的雙參數分配之隨機樣本。可模擬出一組樣本數為 10 之雙參數分配的第一失敗設限樣本，且其具有尺度參數λ=1 和形狀參數β=1，經排序後，可得到以下資料：

0.01176, 0.01858, 0.01998, 0.02309, 0.08031
0.10074, 0.11305, 0.13086, 0.19130, 0.19517

因此在顯著水準 α=0.1 之下檢定 $H_0:\beta=1$ vs. $H_1:\beta\neq1$，我們將以上 10 個觀察值及令β=1 代入(1-6)式至(1-21)式中，即可得到以下 24 個樞紐量的觀察值：

$W^{(1)}(1)=1.55858$、$W^{(2)}(1)=8.80859$
$W^{(3)}(1)=0.25230$、$W^{(4)}(1)=0.37844$
$W^{(5)}(1)=6.51029$、$W^{(6)}(1)=1.49937$
$W^{(7)}(1)=0.76393$、$W^{(8)}(1)=2.21076$
$W^{(9)}(1)=6.17960$、$W^{(10)}(1)=0.16182$
$W^{(11)}(1)=0.24567$、$W^{(12)}(1)=4.07055$
$W^{(13)}(1)=1.38058$、$W^{(14)}(1)=0.72433$
$W^{(15)}(1)=1.94498$、$\delta^{(1)}(1)=0.78086$
$\delta^{(2)}(1)=1.06422$、$\delta^{(3)}(1)=1.69052$

$\delta^{(4)}(1)=2.28801$ 、 $\delta^{(5)}(1)=0.64900$
$\delta^{(6)}(1)=0.57128$、 $\delta^{(7)}(1)=0.65081$
$\delta^{(8)}(1)=0.73096$、 $\delta^{(9)}(1)=0.04475$

再分別查出各個樞紐量臨界值的下界與上界，分別如下（**查表值參見尤慧怡之碩士論文**）：

$W_{0.95}^{(1)}(10,10)=1.2181$、 $W_{0.05}^{(1)}(10,10)=2.6629$ ；
$W_{0.95}^{(2)}(10,10)=3.8181$、 $W_{0.05}^{(2)}(10,10)=195.7120$ ；
$W_{0.95}^{(3)}(10,10)=0.01477$、 $W_{0.05}^{(3)}(10,10)=0.401496$ ；
$W_{0.95}^{(4)}(10,10)=0.13855$、 $W_{0.05}^{(4)}(10,10)=0.47193$ ；
$W_{0.95}^{(5)}(10,10)=3.5348$、 $W_{0.05}^{(5)}(10,10)=76.2979$ ；
$W_{0.95}^{(6)}(10,10)=1.2917$、 $W_{0.05}^{(6)}(10,10)=3.9835$ ；
$W_{0.95}^{(7)}(10,10)=0.60840$ $W_{0.05}^{(7)}(10,10)=0.80842$ ；
$W_{0.95}^{(8)}(10,10)=1.6218$、 $W_{0.05}^{(8)}(10,10)=8.3798$ ；
$W_{0.95}^{(9)}(10,10)=3.0880$、 $W_{0.05}^{(9)}(10,10)=121.1964$ ；
$W_{0.95}^{(10)}(10,10)=0.00824$、 $W_{0.05}^{(10)}(10,10)=0.32389$ ；
$W_{0.95}^{(11)}(10,10)=0.07359$、 $W_{0.05}^{(11)}(10,10)=0.36673$ ；
$W_{0.95}^{(12)}(10,10)=2.7256$、 $W_{0.05}^{(12)}(10,10)=13.5935$ ；
$W_{0.95}^{(13)}(10,10)=1.2643$、 $W_{0.05}^{(13)}(10,10)=2.0157$ ；
$W_{0.95}^{(14)}(10,10)=0.49599$、 $W_{0.05}^{(14)}(10,10)=0.79094$ ；
$W_{0.95}^{(15)}(10,10)=1.5625$、 $W_{0.05}^{(15)}(10,10)=3.3827$ ；
$F_{0.95}(18,2)=0.28133$ 、 $F_{0.05}(18,2)=19.44022$ ；
$F_{0.95}(16,4)=0.33257$、 $F_{0.05}(16,4)=5.84412$ ；
$F_{0.95}(14,6)=0.35116$ 、 $F_{0.05}(14,6)=3.95593$ ；
$F_{0.95}(12,8)=0.35105$ 、 $F_{0.05}(12,8)=3.28394$ ；
$F_{0.95}(10,10)=0.33577$、 $F_{0.05}(10,10)=2.97824$ ；
$F_{0.95}(8,12)=0.30451$ 、 $F_{0.05}(8,12)=2.84856$ ；
$F_{0.95}(6,14)=0.25278$ 、 $F_{0.05}(6,14)=2.84773$ ；
$F_{0.95}(4,16)=0.17111$ 、 $F_{0.05}(4,16)=3.00692$ ；
$F_{0.95}(2,18)=0.05144$ 、 $F_{0.05}(2,18)=3.55456$ ；

由此可知，除 $\delta^{(9)}(1)$ 落於拒絕域內，其餘的樞紐量的觀察值皆落於接受域內。事實上，由檢定力模擬結果中可發現，樞紐量 $\delta^{(m-1)}(\beta)$ 的檢定力大部份都是最低的。因此，在第一失敗設限抽樣方案下對雙參數分配的形狀參數 β 做檢定時，我們建議最好不要採用此樞紐量。

<u>例二：</u>

由電腦模擬出 15 組每組樣本數為 10 的具有尺度參數 λ=0.02 及形狀參數 β=0.5 的雙參數分配之隨機樣本。可模擬出出一組樣本數為 15 之雙參數分配的第一失敗設限樣本，且其具有尺度參數 λ=0.02 和形狀參數 β=0.5，經排序後，可得到以下資料：

0.01762, 0.11896, 0.23205, 0.98789, 1.02088 1.26195, 1.42721, 1.51671, 1.79570, 2.29354 2.75696, 4.14762, 6.42082, 6.68134, 7.27654

再分別查出各個樞紐量臨界值的下界與上界，分別如下（**查表值參見尤慧怡之碩士論文**）：

$W_{0.95}^{(1)}(15,10)=1.2944$、 $W_{0.05}^{(1)}(15,10)=2.4885$ ；
$W_{0.95}^{(2)}(15,10)=5.4884$、 $W_{0.05}^{(2)}(15,10)=292.8468$ ；
$W_{0.95}^{(3)}(15,10)=0.011453$、 $W_{0.05}^{(3)}(15,10)=0.321204$ ；
$W_{0.95}^{(4)}(15,10)=0.14208$、 $W_{0.05}^{(4)}(15,10)=0.41994$ ；
$W_{0.95}^{(5)}(15,10)=4.7139$、 $W_{0.05}^{(5)}(15,10)=86.6729$ ；
$W_{0.95}^{(6)}(15,10)=1.2292$ 、 $W_{0.05}^{(6)}(15,10)=2.8893$ ；
$W_{0.95}^{(7)}(15,10)=0.70478$、 $W_{0.05}^{(7)}(15,10)=0.84025$ ；
$W_{0.95}^{(8)}(15,10)=1.4805$、 $W_{0.05}^{(8)}(15,10)=5.3691$ ；
$W_{0.95}^{(9)}(15,10)=4.1554$、 $W_{0.05}^{(9)}(15,10)=176.1770$ ；
$W_{0.95}^{(10)}(15,10)=0.00568$、 $W_{0.05}^{(10)}(15,10)=0.24061$ ；
$W_{0.95}^{(11)}(15,10)=0.07609$ 、 $W_{0.05}^{(11)}(15,10)=0.30595$ ；
$W_{0.95}^{(12)}(15,10)=3.2672$、 $W_{0.05}^{(12)}(15,10)=13.1283$ ；
$W_{0.95}^{(13)}(15,10)=1.2094$、 $W_{0.05}^{(13)}(15,10)=1.6320$ ；
$W_{0.95}^{(14)}(15,10)=0.61287$、 $W_{0.05}^{(14)}(15,10)=0.82684$ ；
$W_{0.95}^{(15)}(15,10)=1.4365$、 $W_{0.05}^{(15)}(15,10)=2.3219$ ；
$F_{0.95}(28,2)=0.29937$、 $F_{0.05}(28,2)=19.46003$ ；
$F_{0.95}(26,4)=0.36462$、 $F_{0.05}(26,4)=5.76346$ ；
$F_{0.95}(24,6)=0.39869$、 $F_{0.05}(24,6)=3.84146$ ；
$F_{0.95}(22,8)=0.41727$、 $F_{0.05}(22,8)=3.13128$ ；
$F_{0.95}(20,10)=0.42592$、 $F_{0.05}(20,10)=2.77402$ ；
$F_{0.95}(18,12)=0.42697$ 、 $F_{0.05}(18,12)=2.56843$ ；
$F_{0.95}(16,14)=0.42135$、 $F_{0.05}(16,14)=2.44461$ ；
$F_{0.95}(14,16)=0.40906$ 、 $F_{0.05}(14,16)=2.37332$ ；
$F_{0.95}(12,18)=0.38934$、 $F_{0.05}(12,18)=2.34207$ ；
$F_{0.95}(10,20)=0.36049$ 、 $F_{0.05}(10,20)=2.34788$ ；
$F_{0.95}(8,22)=0.31936$ 、 $F_{0.05}(8,22)=2.39650$ ；
$F_{0.95}(6,24)=0.26032$ 、 $F_{0.05}(6,24)=2.50819$ ；
$F_{0.95}(4,26)=0.17351$ 、 $F_{0.05}(4,26)=2.74259$ ；
$F_{0.95}(2,28)=0.05139$ 、 $F_{0.05}(2,28)=3.34039$ ；

將以上所獲得的第一失敗設限樣本及各樞紐量臨界值的上界與下界代入以下方程式，即可分別解出以不同樞紐量所建立出的形狀參數 β 之 90％信賴區間之上界及下界：

$$(1)\quad \begin{cases} \text{下界: } W^{(i)}(\beta)=W_{0.95}^{(i)}(15,10) \\ \text{上界: } W^{(i)}(\beta)=W_{0.05}^{(i)}(15,10) \end{cases}$$

其中 i=1,2,5,6,8,9,12,13,15。

(2) $\begin{cases} 下界：W^{(i)}(\beta) = W^{(i)}_{0.05}(15,10) \\ 上界：W^{(i)}(\beta) = W^{(i)}_{0.95}(15,10) \end{cases}$

其中 i=3,4,7,10,11,14。

(3) $\begin{cases} 下界：\delta^{(j)}(\beta) = F_{0.95}(30-2j,2j) \\ 上界：\delta^{(j)}(\beta) = F_{0.05}(30-2j,2j) \end{cases}$

其中 j=1,…,14。

最後，我們將解出的形狀參數 β 之 90％的信賴區間之上界及下界和信賴區間的區間長度分別列於下表：

樞紐量	信賴區間	區間長度
$W^{(1)}(\beta)$	(0.3314 ,0.6071)	0.2757*
$W^{(2)}(\beta)$	(0.2507 , 0.7325)	0.4818
$W^{(3)}(\beta)$	(0.1831 , 1.1900)	1.0069
$W^{(4)}(\beta)$	(0.3209 , 0.7480)	0.4191
$W^{(5)}(\beta)$	(0.3429 , 0.6872)	0.3443
$W^{(6)}(\beta)$	(0.2866 , 0.9792)	0.6926
$W^{(7)}(\beta)$	(0.3025 , 0.6201)	0.3176
$W^{(8)}(\beta)$	(0.2926 , 0.8954)	0.6028
$W^{(9)}(\beta)$	(0.2209 , 0.8401)	0.6192
$W^{(10)}(\beta)$	(0.2209 , 0.8398)	0.6189
$W^{(11)}(\beta)$	(0.3484 , 0.6318)	0.2834
$W^{(12)}(\beta)$	(0.3483 , 0.6317)	0.2835
$W^{(13)}(\beta)$	(0.2964 , 0.7053)	0.4089
$W^{(14)}(\beta)$	(0.2964 , 0.7051)	0.4087
$W^{(15)}(\beta)$	(0.3044 , 0.6547)	0.3502
$\delta(1)(\beta)$	(0.2507 , 0.7325)	0.4817
$\delta(2)(\beta)$	(0.2793 , 0.6714)	0.3921
$\delta(3)(\beta)$	(0.2706 , 0.6205)	0.3499
$\delta(4)(\beta)$	(0.3935 , 0.7211)	0.3276
$\delta(5)(\beta)$	(0.3461 , 0.6649)	0.3189
$\delta(6)(\beta)$	(0.3333 , 0.6444)	0.3111
$\delta(7)(\beta)$	(0.3065 , 0.6148)	0.3083
$\delta(8)(\beta)$	(0.2681 , 0.5763)	0.3082
$\delta(9)(\beta)$	(0.2452 , 0.5565)	0.3112
$\delta(10)(\beta)$	(0.2324 , 0.5529)	0.3205
$\delta(11)(\beta)$	(0.2040 , 0.5392)	0.3352
$\delta(12)(\beta)$	(0.2185 , 0.5979)	0.3794
$\delta(13)(\beta)$	(0.4048 , 0.9533)	0.5485
$\delta(14)(\beta)$	(0.2051 , 0.9636)	0.7585

註：表中”* ”代表信賴區間的區間長度最短

由上表可看出這些信賴區間皆包含 β 的真實值 0.5，且發現樞紐量 $W^{(1)}(\beta)$ 的區間長度是最短的，而此與我們所模擬的結果一致。

(二)具有單峰型故障率函數的壽命分配

若一隨機變數 X 為具有尺度參數 k 與形狀參數 c 的雙參數的 Burr type XII 分配，則其累積分配函數、機率密度函數及其所對應的故障率函數分別被給定如下：

$$F(x) = 1-(1+x^c)^{-k} \quad (x>0,\ c,k>0), \qquad (3\text{-}1)$$

$$f(x) = ckx^{c-1}(1+x^c)^{-(k+1)} \quad (x>0,\ c,k>0) \qquad (3\text{-}2)$$

與 $h(x) = ckx^{c-1}(1+x^c)^{-1}\ (x>0,\ c,k>0) \qquad (3\text{-}3)$

雖然，此分配具有尺度參數 k 與形狀參數 c，但我們只針對形狀參數 c 做統計推論，其原因如下：

(1) 雙參數的 Burr type XII 分配的形狀會受形狀參數 c 的影響。但不會受尺度參數 k 影響。

(2) 雙參數的 Burr type XII 分配所對應的故障率函數的形狀會受形狀參數 c 影響。當 $c\le 1$ 時，此分配為遞增的故障率函數。而當 c>1 時，故障率函數呈現單峰型。

故本文只針對會影響故障率函數形狀之形狀參數 c 做統計推論。

假設從具有尺度參數 k 與形狀參數 c 的雙參數的 Burr type XII 分配如式(3-1)中抽取出 m 組而每組具有樣本數為 n 的隨機樣本，記為

$$\begin{array}{lcccc} 第1組 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ 第2組 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 第m組 & X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mn} \end{array}$$

，之後找出每一組的最小順序統計量（即每一個系統壞掉的壽命），分別記為 $X_{(1)1}, X_{(1)2}, \ldots, X_{(1)m}$。再將 $X_{(1)1}, X_{(1)2}, \ldots, X_{(1)m}$ 排序後，得其對應的順序統計量記為 $X'_{(1)1} < X'_{(1)2} < \ldots < X'_{(1)m}$。另外，此 m 個最小順序統計量 $X_{(1)1}, X_{(1)2}, \ldots, X_{(1)m}$ 為互相獨立且具有相同的累積分配函數，其形式被給定如下：

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)i}}(x) &= \Pr[X_{(1)i} \le x] = 1-\Pr[X_{(1)i} < x] \\ &= 1-\Pr\{\min[X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in}] > x\} \\ &= 1-\Pr[X_{i1} > x]\cdot \Pr[X_{i2} > x]\cdots \Pr[X_{in} > x] \\ &= 1-\{\Pr[X_{i1} > x]\}^n = 1-\{1-\Pr[X_{i1} \le x]\}^n \\ &= 1-\{1-[1-(1+x^c)^{-k}]\}^n = 1-(1+x^c)^{-nk} \\ &\quad (x>0,\ k,c>0) \qquad (2-4) \end{aligned}$$

因此，由上述結果，我們可將 $X_{(1)1}, X_{(1)2}, \ldots, X_{(1)m}$ 看成來自於具有尺度參數 $k^* = nk$ 與形狀參數 c 的雙參數的 Burr type XII 分配之一組樣本數為 m 的隨機樣本。若令隨機變數 $Y_i = nk\log(1+X^c_{(1)i})$，i=1,…,m 則 Y_i 的累積分配函數為

$$G_{Y_i}(y) = \Pr[Y_i \le y] = \Pr[nk\log(1+X^c_{(1)i}) \le y]$$
$$= \Pr\{X_{(1)i} \le [e^{\frac{y}{nk}} - 1]^{\frac{1}{c}}\} = 1-(1+e^{\frac{y}{nk}}-1)^{-nk}$$
$$= 1 - e^{-y} \quad (y>0) \qquad (2\text{-}5)$$

因此，我們可知 $Y_1,\ldots,Y_m$ 為互相獨立且皆服從於標準指數分配。並且，將 $Y_1,\ldots,Y_m$ 排序後，得其對應之順序統計量，記為 $Y_{(1)} < Y_{(2)} < \ldots < Y_{(m)}$。若將 $Y_i = nk\log(1+X^c_{(1)i})$ 對 $X_{(1)i}$ 微分可推得其結果必會大於零，則可推得 Y_i 為 $X_{(1)i}$ 的嚴格遞增函數，因此我們可得知若 $X'_{(1)1} < X'_{(1)2} \ldots < X'_{(1)m}$，則 $Y_{(1)} < Y_{(2)} < \ldots < Y_{(m)}$，其中 $Y_{(i)} = nk\log(1+X'^c_{(1)i})$ i=1,…,m。利用此組隨機樣本的順序統計量 $Y_{(1)} < Y_{(2)} < \ldots < Y_{(m)}$ 形成下列不同的十五個樞紐量，如下：

$$\xi^{(1)}(c) = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\log(1+x'^c_{(1)i})}{\left[\prod_{i=1}^{m}\log(1+x'^c_{(1)i})\right]^{1/m}} \qquad (2\text{-}6)$$

$$\xi^{(2)}(c) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=2}^{m}\frac{\log(1+x'^c_{(1)i})}{\log(1+x'^c_{(1)1})} \qquad (2\text{-}7)$$

$$\xi^{(3)}(c) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=2}^{m}\frac{\log(1+x'^c_{(1)1})}{\log(1+x'^c_{(1)i})} \qquad (2\text{-}8)$$

$$\xi^{(4)}(c) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\log(1+x'^c_{(1)i})}{\log(1+x'^c_{(1)m})} \qquad (2\text{-}9)$$

$$\xi^{(5)}(c) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\log(1+x'^c_{(1)m})}{\log(1+x'^c_{(1)i})} \qquad (2\text{-}10)$$

$$\xi^{(6)}(c) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=2}^{m}\frac{\log(1+x'^c_{(1)i})}{\log(1+x'^c_{(1)i-1})} \qquad (2\text{-}11)$$

$$\xi^{(7)}(c) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=2}^{m}\frac{\log(1+x'^c_{(1)i-1})}{\log(1+x'^c_{(1)i})} \qquad (2\text{-}12)$$

$$\xi^{(8)}(c) = \begin{cases} \frac{1}{(m-2)}\left[\sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}}\frac{\log(1+x'^c_{(1)2i+1})}{\log(1+x'^c_{(1)2i-1})} + \sum_{j=2}^{\frac{m-1}{2}}\frac{\log(1+x'^c_{(1)2j})}{\log(1+x'^c_{(1)2j-2})}\right] & \text{,若m為奇數} \\ \frac{1}{(m-2)}\left[\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\frac{\log(1+x'^c_{(1)2i+1})}{\log(1+x'^c_{(1)2i-1})} + \sum_{j=2}^{\frac{m}{2}}\frac{\log(1+x'^c_{(1)2j})}{\log(1+x'^c_{(1)2j-2})}\right] & \text{,若m為偶數} \end{cases} \qquad (2\text{-}13)$$

$$\xi^{(9)}(c) = \left[\prod_{i=2}^{m}\frac{\log(1+x'^c_{(1)i})}{\log(1+x'^c_{(1)1})}\right]^{1/m-1} \qquad (2\text{-}14)$$

$$\xi^{(10)}(c) = \left[\prod_{i=2}^{m}\frac{\log(1+x'^c_{(1)1})}{\log(1+x'^c_{(1)i})}\right]^{1/m-1} \qquad (2\text{-}15)$$

$$\xi^{(11)}(c) = \left[\prod_{i=2}^{m}\frac{\log(1+x'^c_{(1)i})}{\log(1+x'^c_{(1)m})}\right]^{1/m-1} \qquad (2\text{-}16)$$

$$\xi^{(12)}(c) = \left[\prod_{i=1}^{m-1}\frac{\log(1+x'^c_{(1)m})}{\log(1+x'^c_{(1)i})}\right]^{1/m-1} \qquad (2\text{-}17)$$

$$\xi^{(13)}(c) = \left[\prod_{i=2}^{m}\frac{\log(1+x'^c_{(1)i})}{\log(1+x'^c_{(1)i-1})}\right]^{1/m-1} \qquad (2\text{-}18)$$

$$\xi^{(14)}(c) = \left[\prod_{i=2}^{m}\frac{\log(1+x'^c_{(1)i-1})}{\log(1+x'^c_{(1)i})}\right]^{1/m-1} \qquad (2\text{-}19)$$

$$\xi^{(15)}(c) = \begin{cases} \left[\prod_{i=1}^{\frac{m-1}{2}}\frac{\log(1+x'^c_{(1)2i+1})}{\log(1+x'^c_{(1)2i-1})} \times \prod_{j=2}^{\frac{m-1}{2}}\frac{\log(1+x'^c_{(1)2j})}{\log(1+x'^c_{(1)2j-2})}\right]^{1/m-2} & \text{,若m為奇數} \\ \left[\prod_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\frac{\log(1+x'^c_{(1)2i+1})}{\log(1+x'^c_{(1)2i-1})} \times \prod_{j=2}^{\frac{m}{2}}\frac{\log(1+x'^c_{(1)2j})}{\log(1+x'^c_{(1)2j-2})}\right]^{1/m-2} & \text{,若m為偶數} \end{cases} \qquad (2\text{-}20)$$

我們可以很容易地證明此十五個樞紐量的分配皆與尺度參數 k 和形狀參數 c 無關；因此，它們對 c 皆能提供一個檢定統計量。在此，我們以 $\xi^{(i)}_{\alpha}(m,n)$ 表示 $\xi^{(i)}(c)$ 的分配之上 α 臨界值(upper α critical value)，$\forall i = 1,\ldots,15$，則

$$\Pr[\xi^{(i)}_{1-\alpha/2}(m,n) < \xi^{(i)}(c) < \xi^{(i)}_{\alpha/2}(m,n)] = 1-\alpha \quad \forall i, 0<\alpha<1$$

因為這些樞紐量的分配計算較複雜且不易求得，所以 $\xi^{(i)}(c)$ 的上百分位數和下百分位數將藉由蒙地卡羅模擬求得，並且採用 AbSoft Fortran (Inclusive of IMSL) 4.6, (1999) Copyright (c), Absoft Crop.的模擬工具，在不同的組數 m=5,…,40 及樣本數 n=10,20,30 之組合下，即可獲得這十五個樞紐量的分配之臨界值附表（**詳細內容參見尤慧怡之碩士論文**）。

之後，我們也推廣 Chen(2000)的理念所提出的樞紐量，其形式如下：

$$\tau^{(j)}(c) = \frac{j\left\{\sum_{i=j+1}^{m}\log(1+x'^c_{(1)i}) - (m-j)\log(1+x'^c_{(1)j})\right\}}{(m-j)\left\{\sum_{i=1}^{j}\log(1+x'^c_{(1)i}) + (m-j)\log(1+x'^c_{(1)j})\right\}}$$

$$, j = 1,\ldots,m-1 \qquad (2\text{-}21)$$

而此樞紐量服從自由度為 $2(m-j)$ 和 $2j$ 的 F 分配。

假設 $X'_{(1)1} < X'_{(1)2} < \ldots < X'_{(1)m}$ 為來自於具有單峰型或遞減故障率函數之雙參數的 Burr type XII 分配之第一失敗設限樣本所對應之順序統計量。則對假

設檢定 $H_0: c=c_0$ vs. $H_1: c\neq c_0$ 的決策原則如下：

(1) 若 $\xi^{(i)}(c_0)>\xi^{(i)}_{\alpha/2}(m,n)$ 或 $\xi^{(i)}(c_0)<\xi^{(i)}_{1-\alpha/2}(m,n)$，則棄卻 $H_0: c=c_0$ ，$i=1,K,15$

(2) 若 $\tau^{(j)}(c_0)>F_{\alpha/2}(2(m-j),2j)$ 或 $\tau^{(j)}(c_0)<F_{1-\alpha/2}(2(m-j),2j)$，則棄卻 $H_0: c=c_0$ ，$j=1,K,m-1$

進一步，我們可證明對方程式 $\xi^{(i)}(c)=t$，$i=1,K,15$ 與 $\tau^{(j)}(c)=t$，$j=1,K,m-1$ 而言，它們皆存在一個 $c>0$ 的唯一解。因此，可利用之前所定義的第一失敗設限樣本及所有的樞紐量，來建立形狀參數 c 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間，其建立的方式如下：

(1) 若 $c_L^{(i)}$ 及 $c_U^{(i)}$ 各為 $\xi^{(i)}(c)=\xi^{(i)}_{1-\alpha/2}(m,n)$ 與 $\xi^{(i)}(c)=\xi^{(i)}_{\alpha/2}(m,n)$ 兩方程式的解，則 $(c_L^{(i)},c_U^{(i)})$ 為形狀參數 c 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間，其中 i=1,2,5,6,8,9,12,13,15。

(2) 若 $c_L^{(i)}$ 及 $c_U^{(i)}$ 各為 $\xi^{(i)}(c)=\xi^{(i)}_{\alpha/2}(m,n)$ 與 $\xi^{(i)}(c)=\xi^{(i)}_{1-\alpha/2}(m,n)$ 兩方程式的解，則 $(c_L^{(i)},c_U^{(i)})$ 為形狀參數 c 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間，其中 i=3,4,7,10,11,14。

(3) 若 $c_L^{*(j)}$ 及 $c_U^{*(j)}$ 各為 $\tau^{(j)}(c)=F_{1-\alpha/2}(2(m-j),2j)$ 與 $\tau^{(j)}(c)=F_{\alpha/2}(2(m-j),2j)$ 兩方程式的解，則 $(c_L^{*(j)},c_U^{*(j)})$ 為形狀參數 c 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間，其中 j=1,…,m-1。

我們可將模擬分成兩個部分，第一部分為利用(2-6)至 (2-21) 式所提到的樞紐量來檢定 $H_0: c=c_0$ vs. $H_1: c\neq c_0$，並且利用蒙地卡羅模擬的方式來比較各樞紐量的檢定力。假定 $c_0=1.4$ (單峰型故障率函數)及 $c_0=1.0$ (遞減的故障率函數)，而在給定顯著水準 $\alpha=0.1$、形狀參數 c=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 4.0, 6.0 及尺度參數 k=2 之下，在不同的組數 m=5,10, …,40 及樣本數 n=10,20,30 之組合下，即可獲得各個樞紐量的檢定力比較表（**詳細內容參見尤慧怡之碩士論文**）。我們可以發現不論是我們所提的樞紐量或推廣 Chen(2000)的理念而提出的樞紐量，在任何的組數、樣本數及 c_0，樞紐量 $\xi^{(1)}(c)$ 的檢定力高於其他樞紐量的檢定力。

接著，我們也同樣用模擬的方法且假定 c 的真值分別為 1.4 (單峰型故障率函數) 及 1.0(遞減的故障率函數)且給定尺度參數 k=2，在不同的組數 m=5,10,…,40 及樣本數 n=10,20,30 之組合下，來求得各個樞紐量在信賴係數 1-α=0.9 之下所建立出形狀參數 c 的 90% 信賴區間及平均區間長度比較表（**詳細內容參見尤慧怡之碩士論文**）。我們可以發現不論是我們所提的樞紐量或推廣 Chen(2000)的理念而提出的樞紐量，在任何的組數、樣本數及 β_0，樞紐量 $\xi^{(1)}(c)$ 所建立的信賴區間的平均區間長度最短。

由以上模擬可知在組數小於等於 40 時，樞紐量 $\xi^{(1)}(c)$ 的檢定力都是最高的且所建立的信賴區間的平均區間長度也是最短。而當組數大於 40 時就不知道其是否仍為較佳的統計方法，又因 $\xi^{(1)}(c)$ 的分配計算複雜且不易求得，所以我們將樞紐量 $\xi^{(1)}(c)$ 改寫，如下：

$$S_1(c)=\left\{\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\log(1+X'^{c}_{(1)i})}{\left[\prod_{i=1}^{m}\log(1+X'^{c}_{(1)i})\right]^{1/m}}-\frac{1}{d}\right\}$$

$$=\left\{\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\log(1+X^{c}_{(1)i})}{\left[\prod_{i=1}^{m}\log(1+X^{c}_{(1)i})\right]^{1/m}}-\frac{1}{d}\right\}=\left[\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i}{\left(\prod_{i=1}^{m}Y_i\right)^{1/m}}-\frac{1}{d}\right] \quad (2\text{-}22)$$

其中 $Y_i=n\lambda(e^{x^{\beta}_{(1)i}}-1)$，$i=1,K,m$ 及 $d=e^{-\gamma}$（γ 為尤拉常數，其近似值為 0.57722），使其在大樣本下分配收斂至常態分配。

而對於假設檢定 $H_0: c=c_0$ vs. $H_1: c\neq c_0$，其中參數空間 $\Omega=\{(k,c)\,|\,k,c>0\}$ 且令 $\varpi=\{(k,c)\,|\,k>0,c=c_0>0\}$，則其概似比檢定的檢定統計量為

$$S_2=-2\log\left[\frac{L(\hat{k}_{\varpi},c_0)}{L(\hat{k}_{\Omega},\hat{c}_{\Omega})}\right] \quad (2\text{-}23)$$
$$=2\log(L(\hat{k}_{\Omega},\hat{c}_{\Omega}))-2\log(L(\hat{k}_{\varpi},c_0))$$

其中 $\hat{k}_{\varpi}$ 為 $\frac{d\log L(k,c_0)}{dk}=\frac{m}{k}-n\sum_{i=1}^{m}\log(1+x^{c_0}_{(1)i})=0$ 的解，即 $\hat{k}_{\varpi}=\frac{m}{n\sum_{i=1}^{m}\log(1+x^{c_0}_{(1)i})}$

而 $(\hat{k}_{\Omega},\hat{c}_{\Omega})$ 為以下聯立方程式的解

$$\begin{cases}\frac{\partial\log L(k,c)}{\partial k}=\frac{m}{k}+n\sum_{i=1}^{m}\log(1+x^{c}_{(1)i})=0\\[2ex] \frac{\partial\log L(k,c)}{\partial c}=\frac{m}{c}+\sum_{i=1}^{m}\log x_{(1)i}-(nk+1)\sum_{i=1}^{m}\frac{x^{c}_{(1)i}\log(x_{(1)i})}{1+x^{c}_{(1)i}}=0\end{cases}$$

在大樣本下，檢定統計量 S_2 將分配收斂至自由度為 1 的卡方分配。因此在顯著水準為 α 時，檢定

$H_0: c = c_0$ vs. $H_1: c \neq c_0$ 的檢定原則為:

(1) 若 $S_1(c|c=c_0) > \dfrac{z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\pi^2}{6}-1}}{d}$ 或

$S_1(c|c=c_0) < \dfrac{z_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\pi^2}{6}-1}}{d}$，則棄卻 $H_0: c = c_0$。

(2) 若 $S_2 > \chi^2_{\alpha/2}(1)$ 或 $S_2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(1)$，則棄卻 $H_0: c = c_0$。

利用(2-22)及(2-23)式所提到的樞紐量來檢定 $H_0: c = c_0$ vs. $H_1: c \neq c_0$，並且利用蒙地卡羅模擬的方式來比較各樞紐量的檢定力。

在給定顯著水準 α=0.1、形狀參數 c=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 4.0, 6.0 及尺度參數 k= 2 之下，在 c_0=1.4 與 c_0=1.0，組數 m=50,60,…,200 及樣本數 n=10,20,30 之組合下，即可獲得樞紐量 $T_1(\beta)$ 及 T_2 的近似檢定力比較表（**詳細內容參見尤慧怡之碩士論文**）。結果我們發現，雖然有些情況 $S_1(c)$ 的檢定力略低於 S_2 或與 S_2 差不多，但以整体而言 $S_1(c)$ 的檢定力的表現優於 S_2。因此，在第一失敗設限抽樣方案下，針對具有單峰型或遞減故障率函數的雙參數的 Burr type XII 分配之形狀參數 c 做假設檢定時，若組數大於 40，則我們建議用樞紐量 $S_1(c)$ 來進行形狀參數 c 的假設檢定。

最後，我們將舉出兩個數值實例來說明形狀參數 c 之假設檢定及區間估計如何應用。

<u>例子一：</u>

由電腦模擬出 10 組每組樣本數為 10 的具有尺度參數 $k=2$、形狀參數 $c=1$ 的雙參數的 Burr type XII 分配之隨機樣本。可模擬出一組樣本數為 10 之雙參數的 Burr type XII 分配的第一失敗設限樣本，且其具有尺度參數 $k=2$ 和形狀參數 $c=1$，經排序後，可得到以下資料：

0.00366, 0.01220, 0.01597, 0.02110, 0.03573
0.03863, 0.04513, 0.04698, 0.05850, 0.21992

因此在顯著水準 α=0.1 之下檢定 $H_0: c = c_0$ vs. $H_1: c \neq c_0$，我們將以上 10 個觀察值及令 β=1 代入(2-6)式至(2-21)式中，即可得到以下 24 個樞紐量的觀察值：

$\xi^{(1)}(1) = 1.615378$、$\xi^{(2)}(1) = 14.23930$；
$\xi^{(3)}(1) = 0.12786$、$\xi^{(4)}(1) = 0.15226$；
$\xi^{(5)}(1) = 12.90964$、$\xi^{(6)}(1) = 1.73867$；
$\xi^{(7)}(1) = 0.69550$、$\xi^{(8)}(1) = 2.27289$；
$\xi^{(9)}(1) = 10.07276$、$\xi^{(10)}(1) = 0.09928$；
$\xi^{(11)}(1) = 0.11856$、$\xi^{(12)}(1) = 8.43456$；
$\xi^{(13)}(1) = 1.55927$、$\xi^{(14)}(1) = 0.64133$；
$\xi^{(15)}(1) = 1.99956$、$\tau^{(1)}(1) = 1.32393$；
$\tau^{(2)}(1) = 0.79482$、$\tau^{(3)}(1) = 0.98803$；
$\tau^{(4)}(1) = 1.10044$、$\tau^{(5)}(1) = 0.79058$；
$\tau^{(6)}(1) = 1.05073$、$\tau^{(7)}(1) = 1.30649$；
$\tau^{(8)}(1) = 2.13168$、$\tau^{(9)}(1) = 3.879525$；

再分別查出各個樞紐量臨界值的下界與上界，分別如下（**查表值參見尤慧怡之碩士論文**）

$\xi^{(1)}_{0.95}(10,10) = 1.2180$、$\xi^{(1)}_{0.05}(10,10) = 2.6627$；
$\xi^{(2)}_{0.95}(10,10) = 3.8124$、$\xi^{(2)}_{0.05}(10,10) = 195.6916$；
$\xi^{(3)}_{0.95}(10,10) = 0.014753$、$\xi^{(3)}_{0.05}(10,10) = 0.401424$；
$\xi^{(4)}_{0.95}(10,10) = 0.13854$、$\xi^{(4)}_{0.05}(10,10) = 0.47189$；
$\xi^{(5)}_{0.95}(10,10) = 3.5352$、$\xi^{(5)}_{0.05}(10,10) = 76.0366$；
$\xi^{(6)}_{0.95}(10,10) = 1.2915$、$\xi^{(6)}_{0.05}(10,10) = 3.9850$；
$\xi^{(7)}_{0.95}(10,10) = 0.60838$、$\xi^{(7)}_{0.05}(10,10) = 0.80847$；
$\xi^{(8)}_{0.95}(10,10) = 1.6218$、$\xi^{(8)}_{0.05}(10,10) = 8.3668$；
$\xi^{(9)}_{0.95}(10,10) = 3.0859$、$\xi^{(9)}_{0.05}(10,10) = 121.0948$；
$\xi^{(10)}_{0.95}(10,10) = 0.00825$、$\xi^{(10)}_{0.05}(10,10) = 0.32387$；
$\xi^{(11)}_{0.95}(10,10) = 0.07362$、$\xi^{(11)}_{0.05}(10,10) = 0.36668$；
$\xi^{(12)}_{0.95}(10,10) = 2.7264$、$\xi^{(12)}_{0.05}(10,10) = 13.5830$；
$\xi^{(13)}_{0.95}(10,10) = 1.2643$、$\xi^{(13)}_{0.05}(10,10) = 2.0157$；
$\xi^{(14)}_{0.95}(10,10) = 0.49605$、$\xi^{(14)}_{0.05}(10,10) = 0.79094$；
$\xi^{(15)}_{0.95}(10,10) = 1.5628$、$\xi^{(15)}_{0.05}(10,10) = 3.3840$；
$F_{0.95}(18,2) = 0.28133$、$F_{0.05}(18,2) = 19.44022$；
$F_{0.95}(16,4) = 0.33257$、$F_{0.05}(16,4) = 5.84412$；
$F_{0.95}(14,6) = 0.35116$、$F_{0.05}(14,6) = 3.95593$；
$F_{0.95}(12,8) = 0.35105$、$F_{0.05}(12,8) = 3.28394$；
$F_{0.95}(10,10) = 0.33577$、$F_{0.05}(10,10) = 2.97824$；
$F_{0.95}(8,12) = 0.30451$、$F_{0.05}(8,12) = 2.84856$；
$F_{0.95}(6,14) = 0.25278$、$F_{0.05}(6,14) = 2.84773$；
$F_{0.95}(4,16) = 0.17111$、$F_{0.05}(4,16) = 3.00692$；
$F_{0.95}(2,18) = 0.05144$、$F_{0.05}(2,18) = 3.55456$；

由此可知，除樞紐量 $\tau^{(9)}(1)$ 落於拒絕域內，其餘的樞紐量皆落於接受域內。事實上，由檢定力模擬結果中也可發現, 樞紐量 $\tau^{(m-1)}(c)$ 的檢定力大部份都是最低的。因此，在第一失敗設限抽樣方案下對雙參數的 Burr type XII 分配的形狀參數 c 做檢定時，我們建議最好不要採用此樞紐量。

例子二：

由電腦模擬出 15 組每組樣本數為 10 的具有尺度參數 $k=1$ 及形狀參數 $c=1.5$ 的雙參數的 Burr type XII 分配之隨機樣本。可模擬出出一組樣本數為 15 之雙參數的 Burr type XII 分配的第一失敗設限樣本，且其具有尺度參數 $k=1$ 和形狀參數 $c=1.5$，經排序後，可得到以下資料：

0.03214, 0.12415, 0.12839, 0.13842 0.14701
0.15675, 0.20702, 0.21303, 0.25753, 0.27820,
0.37071, 0.42340, 0.43379, 0.48332, 0.68087

再分別查出各個樞紐量臨界值的下界與上界，分別如下（查表值參見尤慧怡之碩士論文）

$\xi_{0.95}^{(1)}(15,10)=1.2945$、$\xi_{0.05}^{(1)}(15,10)=2.4883$；
$\xi_{0.95}^{(2)}(15,10)=5.4907$、$\xi_{0.05}^{(2)}(15,10)=292.8835$；
$\xi_{0.95}^{(3)}(15,10)=0.011469$、$\xi_{0.05}^{(3)}(15,10)=0.321157$；
$\xi_{0.95}^{(4)}(15,10)=0.14202$、$\xi_{0.05}^{(4)}(15,10)=0.41987$；
$\xi_{0.95}^{(5)}(15,10)=4.7159$、$\xi_{0.05}^{(5)}(15,10)=86.6117$；
$\xi_{0.95}^{(6)}(15,10)=1.2291$、$\xi_{0.05}^{(6)}(15,10)=2.8826$；
$\xi_{0.95}^{(7)}(15,10)=0.70482$、$\xi_{0.05}^{(7)}(15,10)=0.84028$；
$\xi_{0.95}^{(8)}(15,10)=1.4806$、$\xi_{0.05}^{(8)}(15,10)=5.3686$；
$\xi_{0.95}^{(9)}(15,10)=4.1537$、$\xi_{0.05}^{(9)}(15,10)=176.2877$；
$\xi_{0.95}^{(10)}(15,10)=0.00567$、$\xi_{0.05}^{(10)}(15,10)=0.24069$；
$\xi_{0.95}^{(11)}(15,10)=0.07615$、$\xi_{0.05}^{(11)}(15,10)=0.30610$；
$\xi_{0.95}^{(12)}(15,10)=3.2660$、$\xi_{0.05}^{(12)}(15,10)=13.1361$；
$\xi_{0.95}^{(13)}(15,10)=1.2094$、$\xi_{0.05}^{(13)}(15,10)=1.6316$；
$\xi_{0.95}^{(14)}(15,10)=0.62963$、$\xi_{0.05}^{(14)}(15,10)=0.83261$；
$\xi_{0.95}^{(15)}(15,10)=1.4365$、$\xi_{0.05}^{(15)}(15,10)=2.3217$；
$F_{0.95}(28,2)=0.29937$、$F_{0.05}(28,2)=19.46003$；
$F_{0.95}(26,4)=0.36462$、$F_{0.05}(26,4)=5.76346$；
$F_{0.95}(24,6)=0.39869$、$F_{0.05}(24,6)=3.84146$；
$F_{0.95}(22,8)=0.41727$、$F_{0.05}(22,8)=3.13128$；
$F_{0.95}(20,10)=0.42592$、$F_{0.05}(20,10)=2.77402$；
$F_{0.95}(18,12)=0.42697$、$F_{0.05}(18,12)=2.56843$；
$F_{0.95}(16,14)=0.42135$、$F_{0.05}(16,14)=2.44461$；
$F_{0.95}(14,16)=0.40906$、$F_{0.05}(14,16)=2.37332$；
$F_{0.95}(12,18)=0.38934$、$F_{0.05}(12,18)=2.34207$；
$F_{0.95}(10,20)=0.36049$、$F_{0.05}(10,20)=2.34788$；
$F_{0.95}(8,22)=0.31936$、$F_{0.05}(8,22)=2.39650$；
$F_{0.95}(6,24)=0.26032$、$F_{0.05}(6,24)=2.50819$；
$F_{0.95}(4,26)=0.17351$、$F_{0.05}(4,26)=2.74259$；
$F_{0.95}(2,28)=0.05139$、$F_{0.05}(2,28)=3.34039$；

將以上所獲得的第一失敗設限樣本及各樞紐量臨界值的上界與下界代入以下方程式，即可分別解出以不同樞紐量所建立出的形狀參數 c 之 90% 信賴區間之上界及下界：

(1) $\begin{cases} 下界：\xi^{(i)}(c)=\xi_{0.95}^{(i)}(15,10) \\ 上界：\xi^{(i)}(c)=\xi_{0.05}^{(i)}(15,10) \end{cases}$

其中 i=1,2,5,6,8,9,12,13,15。

(2) $\begin{cases} 下界：\xi^{(i)}(c)=\xi_{0.05}^{(i)}(15,10) \\ 上界：\xi^{(i)}(c)=\xi_{0.95}^{(i)}(15,10) \end{cases}$

其中 i=3,4,7,10,11,14。

(3) $\begin{cases} 下界：\tau^{(j)}(c)=F_{0.95}(30-2j,2j) \\ 上界：\tau^{(j)}(c)=F_{0.05}(30-2j,2j) \end{cases}$

其中 j=1,…,14。

最後，我們將解出的形狀參數 β 之 90% 的信賴區間之上界及下界和信賴區間的區間長度分別列於下表：

樞紐量	信賴區間	區間長度
ξ(1)(c)	(1.1843，2.2909)	*1.1065
ξ(2)(c)	(0.8515，2.4240)	1.5725
ξ(3)(c)	(0.6379，2.5300)	1.8921
ξ(4)(c)	(0.9646，2.4100)	1.4454
ξ(5)(c)	(1.1252，2.3167)	1.1915
ξ(6)(c)	(0.8291，2.3123)	1.4832
ξ(7)(c)	(1.0811，2.4350)	1.3539
ξ(8)(c)	(1.0375，2.7506)	1.7131
ξ(9)(c)	(0.7568，2.5404)	1.7836
ξ(10)(c)	(0.7570，2.5400)	1.7830
ξ(11)(c)	(1.1045，2.2325)	1.1280
ξ(12)(c)	(1.1044，2.2322)	1.1279
ξ(13)(c)	(0.9558，2.3031)	1.3473
ξ(14)(c)	(0.9243，2.1825)	1.2582
ξ(15)(c)	(1.1558，2.5352)	1.3794
τ(1)(c)	(0.8514, 2.4240)	1.5726
τ(2)(c)	(1.4586, 3.3199)	1.8613
τ(3)(c)	(1.2532, 2.7765)	1.5233
τ(4)(c)	(1.1334, 2.4983)	1.3649
τ(5)(c)	(1.0184, 2.2748)	1.2564
τ(6)(c)	(0.9163, 2.0999)	1.1836
τ(7)(c)	(1.0203, 2.3222)	1.3019
τ(8)(c)	(0.8829, 2.1241)	1.2412
τ(9)(c)	(0.9080, 2.2546)	1.3466
τ(10)(c)	(0.8007, 2.1618)	1.3611
τ(11)(c)	(0.9935, 2.7729)	1.7794
τ(12)(c)	(0.9939, 3.0985)	2.1046
τ(13)(c)	(0.6083, 2.7269)	2.1186
τ(14)(c)	(0.1897, 2.5482)	2.3585

註：表中”* ”代表信賴區間的區間長度最短

由上表可看出這些樞紐量建立的信賴區間皆包含 c 的真實值 1.5，且發現樞紐量$\xi^{(1)}(c)$的區間長度是最短的，而此與我們所模擬的結果一致。

三、結果與討論

在前述的章節中我們探討在第一失敗設限抽樣方案下，針對具有浴缸型或單峰型故障率函數的雙參數分配之形狀參數做統計推論。而從模擬結果與數值實例中，我們可以歸納出下列幾個結果：

1.在第一失敗設限抽樣方案下，對具有浴缸型或單峰型故障率函數的雙參數分配而言，以算數平均數除以幾何平均數的這一個樞紐量$W^{(1)}(\beta)$（$\xi^{(1)}(c)$）的整体表現最佳。

2.在第一失敗設限抽樣方案下，對具有浴缸型或單峰型故障率函數的雙參數分配而言，在推廣 Chen(2000)的理念而提出的樞紐量中，以樞紐量$\delta^{(j)}(\beta)$（$\tau^{(j)}(c)$）的表現較佳，其中 j 大致會落在$\left[\frac{m}{4}\right]$、$\left[\frac{m}{4}\right]+1$或$\left[\frac{m}{4}\right]+2$左右。

3.樞紐量$W^{(1)}(\beta)$（$\xi^{(1)}(c)$）的分配計算較複雜且不易求得，需以模擬方式造出其臨界值附表，因此，當沒有樞紐量$W^{(1)}(\beta)$的臨界值附表時，我們建議採用推廣 Chen(2000)的理念而提出的樞紐量中較佳的樞紐量來代替，因為此樞紐量的分配為 F 分配，而 F 分配的臨界值的查表值較易得到。

4.在第一失敗設限抽樣方案下，對具有浴缸型或單峰型故障率函數的雙參數分配而言，在大樣下將$W^{(1)}(\beta)$（$\xi^{(1)}(c)$）改寫後的樞紐量$T_1(\beta)$（$S_1(c)$）的整体表現優於概似比檢定的樞紐量T_2（S_2）。

四、計劃成果自評

就整體來說，我們所提出的方法都適用雙參數分配與雙參數的 Burr type XII 分配。在檢定力比較方面，我們提出檢定統計量中，不論在那一個樣本數下，$W^{(1)}(\beta)$（$\xi^{(1)}(c)$）的檢定力高於其他樞紐量的檢定力；而在其信賴區間之平均區間長度的比較方面，皆是$W^{(1)}(\beta)$（$\xi^{(1)}(c)$）的信賴區間平均長度最短；且在在大樣下將$W^{(1)}(\beta)$（$\xi^{(1)}(c)$）改寫後的樞紐量$T_1(\beta)$（$S_1(c)$）的整体表現優於概似比檢定的樞紐量T_2（S_2）。

五、參考文獻

英文部分

[1] Acar M. and Gaver D.P. (1979),”Analytical hazard representations for use in reliability, mortality, and simulation studies”, *Communications in statistics: theory and methods*, **8**, 91-111.

[2] Ali Mousa M.A.M. and Jaheen Z.F. (2002), ”Bayesian prediction for progressively censored data form the Burr model”, *Statistical Papers*, **43**, 578-593.

[3] Balasooriya U. (1995), ”Failure-Censored Reliability Sampling Plans for Exponential Distribution”, *Journal of Statistical Computation & Simulation*, **52**, 337-349.

[4] Chang D.S. and Tang L.C. (1993), “Reliability Bounds and Critical Time for the Birnbaum-Saunders Distribution”, *IEEE Transactions on Reliability*, **42(3)**, 464-469.

[5] Chen Z. (1999), “Statistical inference about the shape parameter of the exponential power distribution”, *Statistical papers*, **40**, 459-468.

[6] Chen Z. (2000), “A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function”, *Statistics & Probability Letters*, **49**, 155-161.

[7] Hjorth U. (1980), “A reliability distribution with increasing, decreasing, and bathtub-shape failure rate. *Technometrics*, **22**, 99-107.

[8] Jiang R., Ji P. and Xiao X. (2003), ”Aging Property of Unimodal Failure Rate Models”, *Reliability Engineering and System Safety*, **79**, 113-116.

[9] Mudholkar G.S. and Srivastava D.K. (1993), “Exponential Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data”, *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 299-302.

[10] Rao C.R. (1973), “*Linear Statistical Inference and Its Applications*”, Second Edition, New York: Wiley.

[11] Smith T.M. and Bain L.J. (1975), “An exponential power life-testing distribution”, *Communications in statistics: Simulation and computation*, **4**, 469-481.

[12] Serfling R.J. (1980), “*Approximation Theorems of Mathematical Statistics*”, New York: Wiley.

[13] Tang L.C., Lu Y. and Chew E.P. (1999), “Mean Residual Life of Lifetime Distributions”, *IEEE Transactions on Reliability*, **48(1)**, 73-78.

[14] Wu J.W. and Tsai W.L. (2000),”Failure Censored Sampling Plan for the Weibull Distribution”, *International Journal of Information and Management Science*, **11(2)**, 13-25.

[15] Wu J. W., Tsai W.L. and Ouyang L.J. (2001), ”Limited Failure Censored life Test for the Weibull Distribution”, *IEEE Transactions on*

Reliability, **50**, 107-111.
[16] Wu J.W., Hung W.L. and Tsai C.H. (2003), "Estimation of the parameters of the Gompertz Distribution under the First Failure-Censored Sampling Plan", *Statistics*, **37**, 517-525.
[17] Wu J.W., Lu H.L., Chen C.H. and Wu C.H. (2004), "Statistical inference about the shape parameter of the new two-parameter bathtub-shaped lifetime distribution", *Quality & Reliability Engineering International*, **20**, 607-616.

中文部分
[1]尤慧怡，第一失敗設限抽樣方案下對具有浴缸型或單峰型(山型)故障率函數的壽命分配之形狀參數做統計推論，台北；淡江大學統計伯應用統計學碩士班碩士論文，92 年。